Wissen/ Können | Beispiele

1. Zusammengesetzte Zufallsexperimente:

Die **bedingte Wahrscheinlichkeit** des Ereignisses A unter der Bedingung B:

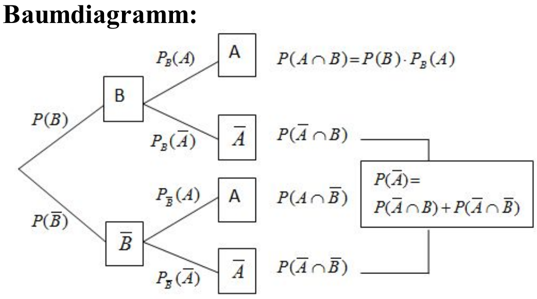
$$P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)};\ P(B)\neq 0$$

$A\cap B$: Die Schnittmenge von A und B beinhaltet nur die Ergebnisse, die sowohl in A als auch in B liegen.

Vierfeldertafel:

	A	$\overline{A}$	
B	$P(A\cap B)$	$P(\overline{A}\cap B)$	$P(B)$
$\overline{B}$	$P(A\cap \overline{B})$	$P(\overline{A}\cap \overline{B})$	$P(\overline{B})$
	$P(A)$	$P(\overline{A})$	1

Baumdiagramm:



Beispiel: Urne mit 3 schwarzen Kugeln mit den Zahlen 1,2,3 und 2 weißen Kugeln mit den Zahlen 4,5

A: „Die gezogene Kugel ist weiß.“

B: „Die Zahl auf der gezogenen Kugel ist gerade.“

$A\cap B$: „Die gezogene Kugel ist weiß und trägt eine gerade Zahl.“

$P(A\cap B)=\frac{1}{5}$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugel weiß ist, wenn ich schon weiß, dass ihre Zahl gerade ist?

$$P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{5}}=\frac{1}{2}$$

Merke: Bei der bedingten Wahrscheinlichkeit habe ich schon Vorinformationen, d.h. eine Vorauswahl, aus der heraus ich das Experiment starte.

2. Berechnungen an Kreis und Kugel:

Kreis mit Radius r:

Sektorfläche: $A_S=\frac{\alpha}{360^0}\cdot r^2\pi$

Länge des Kreisbogens: $b=\frac{\alpha}{360^0}\cdot 2r\pi$

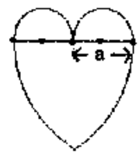
Bogenmaß (α_{RAD}): Zum jeweiligen Winkel im Gradmaß (α_{DEG}) gehörende Bogenlänge auf dem Einheitskreis: $\frac{\alpha_{RAD}}{\alpha_{DEG}}=\frac{2\pi}{360°}$

Kugel mit Radius r:

Volumen: $V_{Kugel}=\frac{4}{3}\pi\cdot r^3$;

Oberflächeninhalt: $O_{Kugel}=4\pi\cdot r^2$

- Gesucht: Flächeninhalt und Umfang der Figur



$\left[\ A=a^2\left(\frac{19}{12}\pi-\sqrt{3}\right),\quad u=\frac{7}{3}a\pi\ \right]$

- Gegeben ist eine Kugel mit einem Durchmesser von 51,0 cm.

  $r=\frac{d}{2}=25{,}5\,cm$

  $V_{Kugel}=\frac{4}{3}\pi\cdot(25{,}5\,cm)^3\approx 69{,}5\,dm^3$

  $O_{Kugel}=4\pi\cdot(25{,}5\,cm)^2\approx 81{,}7\,dm^2$

3. Logarithmus und einfache Exponentialgl.:

Der **Logarithmus von b zur Basis a** ist diejenige Zahl, mit der man a potenzieren muss, um b zu erhalten:

$\log_a b$ mit: $a,b\in R^+\ und\ a\neq 1$

Dies ist die Lösung der Gleichung: $a^x=b$.

Taschenrechner geben u.a. die Werte des Zehnerlogarithmus $\log_{10}b=\lg b$ aus: $\log_a b=\frac{\lg b}{\lg a}$

Rechenregeln für Logarithmen (b, c > 0):

(1) $\log_a(b\cdot c)=\log_a b+\log_a c$; (2) $\log_a(b:c)=\log_a b-\log_a c$

(3) $\log_a(b^c)=c\cdot\log_a b$

Einfache Exponentialgleichungen:

1) Zusammenfassen zu: $a^x=b$, dann log anwenden.
2) Auf beiden Seiten logarithmieren und Rechenregeln für Logarithmus anwenden, um direkt nach x aufzulösen.
3) Umformen, so dass auf beiden Seiten Potenz mit gleicher Basis ist => Exponentenvergleich
4) Näherung, falls nicht anders lösbar.

- $3^x=81 \Rightarrow x=\log_3 81=\frac{\lg 81}{\lg 3}=4$
- $7\cdot 2^{4x}-3\cdot 5^{x+2}=0$

  $7\cdot(2^4)^x=3\cdot(5^x\cdot 5^2)$

  $7\cdot 16^x=75\cdot 5^x$

  $\left(\frac{16}{5}\right)^x=\frac{75}{7}$

  $x=\log_{\frac{16}{5}}\frac{75}{7}\approx 2{,}04$
- $2^x\cdot 3^{x+1}=7\cdot 5^{2x}\quad |\lg(...)$

  $\lg(2^x)+\lg(3^{x+1})=\lg 7+\lg(5^{2x})$

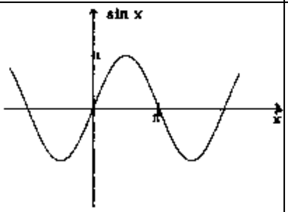
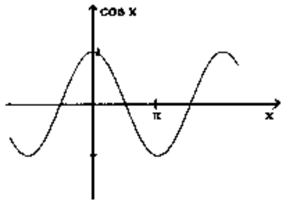
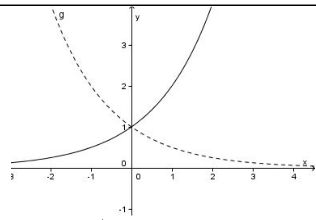
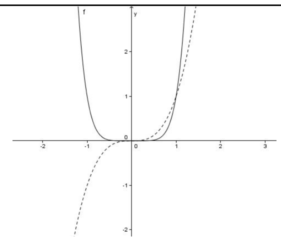
  $x\cdot\lg 2+(x+1)\cdot\lg 3=\lg 7+2x\cdot\lg 5\quad |-\lg 3-2x\lg 5$

  $x\cdot(\lg 2+\lg 3-2\lg 5)=\lg 7-\lg 3$

  $x=\frac{\lg 7-\lg 3}{\lg 2+\lg 3-2\lg 5}\approx -0{,}594$
- $2^{3x+2}=4^x \Leftrightarrow 2^{3x+2}=2^{2x}\Rightarrow Exp.vgl: 3x+2=2x$

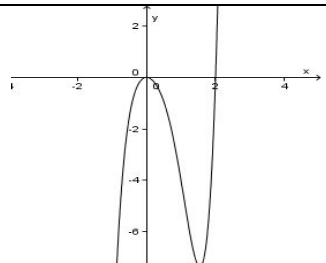
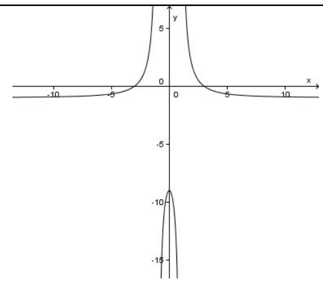
  $\Leftrightarrow x=-2$

4. Spezielle Funktionen:

	Sinusfunktion	**Kosinusfunktion**	**Exponentialfunktion**	**Potenzfunktion**
Term	sin(x)	cos(x)	a^x mit 0<a	x^n mit $n \in N$
Graph			 _____ : a>1 ------- : 0<a<1	 _____: n gerade ------- : n ungerade
Max. Def-, Wertemenge	D = R, W = [-1;1] -> Amplitude: A = 1	D = R, W = [-1;1] -> Amplitude: A = 1	D = R, W = R^+	D = R, n gerade: W = R^+ n ungerade: W = R
Nullstellen	$\frac{k}{2}\pi$ mit $k \in Z$	$\frac{2k+1}{2}\pi$ mit $k \in Z$	keine	x = 0, n-fache NS
Symmetrie	achsen- und punktsymmetrisch, v.a. Pktsymm. zum Ursprung	achsen- und punktsymm., v.a. Achsensymm. zur y-Achse	Weder achsen- noch punktsymmetrisch	n gerade: achsensymm. n ungerade: punktsymm.
Grenzwerte	Keine	keine	Für a>1: $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = \infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$	$\lim\limits_{x\to\infty} x^n = \infty$ n gerade: $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = \infty$ n unger: $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = -\infty$
Steigungs-verhalten	Steigend zwischen Min und Max, fallend zwischen Max und Min	Steigend zwischen Min und Max, fallend zwischen Max und Min	Für a>1: steigend Für 0<a<1: fallend	n gerade: fallend (x<0), steigend (x>0) n ungerade: steigend
Extrempunkte	Minima bzw. Maxima: bei x= $\frac{2k+1}{2}\pi$ mit $k \in Z$, y-Wert -1 bzw 1	Minima bzw. Maxima: bei x = $\frac{k}{2}\pi$ mit $k \in Z$, y-Wert -1 bzw 1	keine	n gerade: Scheitel (0/0) n ungerade: keine
Besonder-heiten	Periode 2π	Periode 2π	(0/1) auf dem Graphen	(1/1) auf jedem Graphen, (-1/1) n gerade bzw. (-1/-1) n ungerade

5. Eigenschaften von Funktionen:

(1) **Maximale Definitionsmenge** (Nenner nie Null, Radikant nicht negativ), **Wertemenge**
(2) **Nullstellen:** f(x) = 0, Art der NS; **Schnittpunkt mit y-Achse**: f(0)
(3) **Symmetrieverhalten des Graphen:**
Punktsymm. zum Ursprung: f(-x) = -f(x)
Achsensymm. zur y-Achse: f(-x) = f(x)
(4) **Verhalten der Funktionswerte für beliebig große/kleine x-Werte (Grenzwerte):** v.a.
$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^n} = 0; \quad n \in N$$
(5) **Steigungsverhalten des Graphen**
(6) **Extrempunkte des Graphen**

	Ganzrationale Funktion	**Gebrochen-rationale Fkt.**
	$x \mapsto 2x^5 - 4x^4 + 2x^3 - 4x^2$ $= 2x^2 \cdot (x-2) \cdot (x^2+1)$	$x \mapsto \frac{(x+3)\cdot(-x+3)}{x^2-1}$ $= \frac{-x^2+9}{x^2-1}$
G		
(1)	D = R, W = R	D = R\{-1;1}, W = R\]-9;-1[
(2)	x_1=0 (doppelt) x_2=2 (einfach)	NS des Zählers: x_1= -3; x_2=3 (beide einfach)
(3)	keine	Achsensymm. zur y-Achse: $f(-x) = \frac{-(-x)^2+9}{(-x)^2-1} = \frac{-x^2+9}{x^2-1} = f(x)$
(4)	$\lim\limits_{x\to\infty}\left[2x^5 - 4x^4 + 2x^3 - 4x^2\right] =$ $= \lim\limits_{x\to\infty}\left[x^5 \cdot \left(2 - \frac{4}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{4}{x^3}\right)\right] = \infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[2x^5 - 4x^4 + 2x^3 - 4x^2\right] = -\infty$	z.B.: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-x^2+9}{x^2-1} =$ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2\cdot\left(-1+\frac{9}{x^2}\right)}{x^2\cdot\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}\right) = = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{-1+\frac{9}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}}\right) = -1$
(5)	Steigend:]-∞;0[;]x_{S2};∞[Fallend:]0; x_{S2}[	Steigend: $]-\infty;-1[\cup]-1;0[$ Fallend: $]0;1[\cup]1;\infty[$
(6)	Lokales Maximum: (0/0); Lokales Minimum: (x_{S2}/y_{S2})	Lokales Minimum: (0/-9)

6. Parameter verändern Funktionsgraphen:

Veränderungen im Funktionsterm	Auswirkungen auf Graphen
g(x) = f(x) + b	Verschiebung um b in y-Richtung
g(x) = a·f(x) (a≠0)	Streckung (Stauchung) mit dem Faktor a in y-Richtung. Für a<0 zusätzlich Spiegelung an der x-Achse.
Spezialfall: g(x) = -f(x)	Spiegelung an der x-Achse
g(x) = f(x+d)	Verschiebung um –d in x-Richtung
g(x) = f(c·x) (a≠0)	Streckung (Stauchung) mit dem Faktor $\frac{1}{c}$ in x-Richtung. Für c<0 bedeutet das zusätzlich eine Spiegelung an der y-Achse.
Spezialfall: g(x) = f(-x)	Spiegelung an der y-Achse