Wissen und Können / Aufgaben und Beispiele

1. Funktionen

Bezeichnungen:

Funktionsvorschrift: **x** $\mapsto \frac{1}{x-1}$

Funktionsterm kurz f(x) ist hier: $\frac{1}{x-1}$

Funktionsgleichung **y =** $\frac{1}{x-1}$

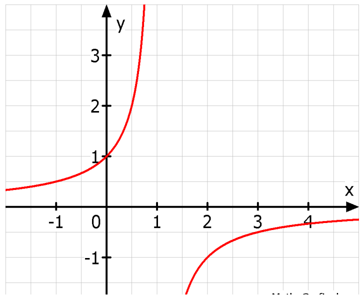
Graph einer Funktion:

Eine Funktion ist eine **eindeutige Zuordnung:** Jedem Wert x aus der Definitionsmenge D wird genau ein Wert y aus IR zugeordnet.

Beispiel einer Funktion: f : **x** $\mapsto \frac{1}{x-1}$

D_{max} = Q \ {1} , x=1 ist nicht erlaubt, weil der Nenner sonst 0 wird.
f(2) = 1 , f(3) = 0,5, f(-1) = -0,5
Eine Wertetabelle gibt für verschiedene x die y-Werte an und erlaubt den Graphen zu zeichnen.

x	-3	-2	-1	0	2
y	-0,25	-0,33	-0,5	-1	1



Schnittpunkte mit den Achsen:

Schnittpunkt mit der y-Achse

Bsp : g : x $\mapsto$ 2x -4
Setze x=0 in die Funktion ein :
f(0) = 2• 0 – 4 = -4 $\Rightarrow S_y(0|-4)$

Schnittpunkte mit der x-Achse
Ihre x-Koordinaten heißen **Nullstellen**

Löse die Gleichung f(x)= 0 $\Rightarrow$ 2x-4 = 0 $\Leftrightarrow$ 2x=4 $\Leftrightarrow$ x=2 $\Rightarrow$ S(2|0)
Der Graph besitzt somit die Nullstelle x= 2

Schnittpunkte zweier Graphen

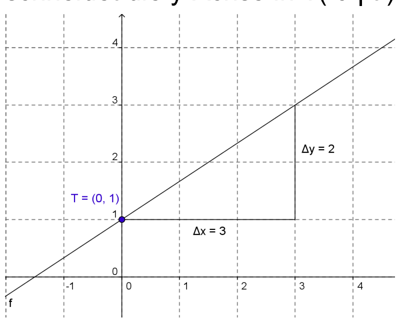
Gleichsetzen der Funktionsterme,
Lösen der entstandenen Gleichung,
y-Werte berechnen, Punkte angeben

f(x) = x - 1, g(x) = 2x +1
Ansatz: f(x)=g(x) $\Leftrightarrow$ x - 1 = 2x + 1 $\Leftrightarrow$ x= -2
Es gibt einenSchnittpunkt:
S_1: x = -2 $\Rightarrow$ f(-2) = -3 $\Rightarrow$ $S_1(-2|-3)$

> **1. Aufgabe**: Bestimme die Funktionswerte!
> a) f(x) = 2x -1 f(0); f(-3); f(20); f(0,1)
> b) g(x) = -x²+3 g(1); g(-2); g(0); g(15)
> c) Bestimme die Schnittpunkte mit den Achsen für y= $-\frac{2}{3}$x+1
> d) Bestimme den Schnittpunkt von f(x)= 3x - 2 und g(x) = –x + 2

2. Lineare Funktionen y = m·x + t

m ist die **Steigung** der Geraden
t ist der **y-Achsenabschnitt**, d.h. Gerade schneidet die y-Achse in T(0 | t)



m = $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{3}$ t= 1 $\Rightarrow$ y= $\frac{2}{3}x+1$

Erstelle die Gleichung der Geraden AB mit A(2|3) und B(-2|1):
1. Schritt: Berechne die Steigung

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} = \frac{1-3}{-2-2} = \frac{1}{2}$$

2. Schritt: Bestimme den Achsenabschnitt t
Setze einen Punkt z.B. B(-2|1) in die Gleichung y = $\frac{1}{2}$·x + t ein

$1 = \frac{1}{2}\cdot(-2) + t \Rightarrow t = 2 \Rightarrow$ Gerade AB: $y = \frac{1}{2}x + 2$

> **2. Aufgabe:**
> a) Bestimme die Gleichung der Geraden durch C(3|-1) und D(-2|2).
> b) Zeichne die Graphen der Funktionen mit $y = 3x - 2$ und $y = -x + 2$ mit Hilfe von m und t

Sonderfall: **Direkte Proportionalität**

Funktionsgleichung: **y = m • x**
Der Graph ist eine **Ursprungsgerade**
Wertepaare sind **quotientengleich**

Dem Doppelten, Dreifachen, ... der einen Größe wird das Doppelte, Dreifache, ... der anderen Größe zugeordnet.

x Anzahl Brezen	1	2	4	8
y Preis in €	0,50	1,00	2,00	4,00
y/x in €	0,5	0,5	0,5	0,5

3. Gleichungssysteme mit zwei Variablen

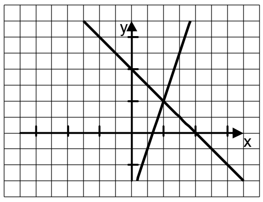
Zwei lineare Gleichungen mit zwei Variablen bilden ein lineares Gleichungssystem **LGS**. Es kann **eine Lösung A** (Zahlenpaar) **oder keine B** oder **unendlich viele Lösungen C** besitzen. **Lösungsmöglichkeiten:**

a) grafisches Verfahren

Stelle beide Gleichungen als Funktionsgleichung y =m x + t dar.

Der Schnittpunkt S der Graphen ist die Lösungsmenge des LGS

Bsp1:
(I) $y = 3x - 2$
(II) $y = -x + 2$
Zeichne die Geraden



Geometrische Deutung der Lösung:
A: 1 Lösung ⇔ Geraden haben Schnittpunkt
B: keine Lösung ⇔ Geraden parallel
C: unendlich viele Lsg ⇔ Geraden identisch

$S(1|1) \Rightarrow L = \{(1|1)\}$

3. Aufgabe:
a) Löse das Gleichungssystem
(I) $x + 2y = 7$
(II) $3y - x = 8$
mit dem Einsetzungsverfahren

b) Einsetzungsverfahren

Bsp2: (I) $x - 2y = 1$
(II) $x + 2y = 5$

(II) nach x aufgelöst, ergibt: (II') $x = 5 - 2y$
in (I) $(5 - 2y) - 2y = 1 \quad \Leftrightarrow \quad y = 1$
in (II') $x = 5 - 2 \cdot 1 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3 \quad \Rightarrow L = \{(3|1)\}$

c) Additionsverfahren

Addition von 2 Gleichungen ist eine Äquivalenzumformung.

Bsp.3 : (I) $3x - 2y = 34$ (II) $x + y = 128 \quad |\cdot 2$
(II') $2x + 2y = 256$

(I)+(II'): $5x = 290 \Leftrightarrow x = 58$
$\Rightarrow y = 128 - 58 = 70 \quad \Rightarrow L = \{(58|70)\}$

Bsp.4 : (I) $7x - 2y = 11$
(II) $-7x + 2y = -3$

(I)+(II): 0+0 = 8 Widerspruch!
Es gibt also keine Lösung. L= { }

3. Aufgabe:
b) Löse das Gleichungssystem
(I) $4x + 6y = 18$
(II) $-2x + 2y = -4$
mit dem Additionsverfahren.

4. Gebrochen-rationale Funktionen

der Form $g(x) = \frac{c}{x-a} + b$

enthalten im Nenner die Variable x.

Nenner **N**ie **N**ull: D = Q \ {a} !

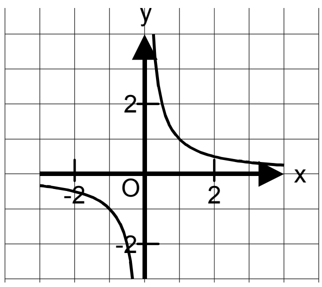
Die Asymptote ist eine Gerade, der sich der Graph immer mehr annähert.

Senkrechte Asymptote bei x = a
(sie heißt auch Polstelle)

Waagrechte Asymptote bei y = b

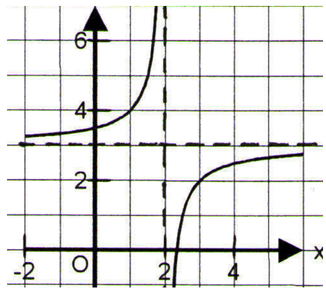
Die Graphen heißen **Hyperbeln**.
Den Graphen von g erhält man durch Verschieben des Graphen von f mit f(x) = $\frac{c}{x}$

$f(x) = \frac{1}{x}$ D = Q \ {0}



Asymptoten :x= 0 und y= 0

$g(x) = \frac{-1}{x-2} + 3$ D = Q \ {2}



Asymptoten: x= 2 und y = 3

4. Aufgabe: $f(x) = \frac{1}{x+1} - 2$
a) Bestimme f(-2), f(0,5) und alle Asymptoten !
b) Zeichne den Graph von f(x)

5. Bruchterme und Bruchgleichungen

Vereinfachen und Zusammenfassen von Bruchtermen:

Bruchterme können wie Brüche **erweitert und gekürzt** werden.

Bruchterme werden vor dem Addieren oder Subtrahieren **gleichnamig** gemacht

Beachte: Zuerst die Definitionsmenge angeben!

1) D = Q \ {1}; D bleibt bei allen Umformungen unverändert:

$$\frac{x^2 - x}{1 - x} = \frac{-x \cdot (1 - x)}{(1 - x)} = -x$$

2) $D = Q \setminus \{-1,0\} \qquad \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x^2 + x} =$

$$\frac{1}{(x+1)} + \frac{1}{x \cdot (x+1)} = \frac{x}{x \cdot (x+1)} + \frac{1}{x \cdot (x+1)} = \frac{x+1}{x \cdot (x+1)} = \frac{1}{x}$$

Lösen von Bruchgleichungen:

1. **Definitionsmenge** bestimmen.
2. Beide Seiten der Bruchgleichung mit **dem Hauptnenner** multiplizieren und dann kürzen.
3. Vereinfachte Gleichung wie üblich lösen. Prüfen, ob **Lösung in der Definitionsmenge** liegt.

$$\frac{1}{x-7} = \frac{14}{(x-7) \cdot (x+7)} \qquad |\cdot(x-7)\cdot(x+7) \qquad ; \qquad D = Q \setminus \{-7;+7\}$$

„Mit dem Hauptnenner multiplizieren“

$$\frac{1}{x-7}(x-7)(x+7) = \frac{14}{(x-7) \cdot (x+7)}(x-7)(x+7) \quad \text{Kürzen der Terme}$$

liefert: $(x+7) = -14 \quad \Leftrightarrow \quad x = 7 \notin D \quad \Rightarrow \quad L = \{\ \}$, es gibt keine Lösung

5. Aufgabe: Vereinfache die Terme in a, b Bestimme die Definitions- und Lösungsmenge in c, d:

a) $\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{2-x}$ b) $\dfrac{x}{2}-\dfrac{0{,}5x^2}{x+1}$ c) $\dfrac{x^2}{x+1}+1=2+x$ d) $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{x^2-x}$

6. Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

($a, b \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ und m, n $\in \mathbb{Z}$) gilt:

$a^0 = 1$; $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

$7^0 = 1$; $3^{-4} = \dfrac{1}{3^4}$; $(-x)^0 = 1$; $\dfrac{1}{z^{-3}} = z^{-(-3)} = z^3$

Rechengesetze für Potenzen

Potenzen mit **gleicher Basis:**

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $a^m : a^n = \dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

$6^{-3} \cdot 6^7 = 6^{-3+7} = 6^4$

$(-5)^3 : (-5)^{-2} = (-5)^{3-(-2)} = (-5)^5$

$(2^{-4})^{-3} = 2^{-4\cdot(-3)} = 2^{12}$

$(-s)^{-2}(-s)^{-5} = (-s)^{-2+(-5)} = (-s)^{-7}$

$\dfrac{b^2}{b^3} = b^{2-3} = b^{-1}$

$(k^3)^{-2} = k^{3\cdot(-2)} = k^{-6}$

Potenzen mit **gleichem Exponenten**:

$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

$a^n : b^n = (a : b)^n$ bzw. $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$

$5^7 \cdot 6^7 = (5 \cdot 6)^7 = 30^7$

$8^9 : 4^9 = (8 : 4)^9 = 2^9$

$(-a)^{-5} \cdot b^{-5} = (-a \cdot b)^{-5}$

$\dfrac{x^{-3}}{y^{-3}} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^{-3}$

6. Aufgabe: Vereinfache!

$a)\ \dfrac{x^3 x^{-4}}{x^{-5}} =$ $b)\ (2y)^{-2} \cdot \dfrac{y^3}{4} + 4y =$

Beachte: $(-3)^4 = 3^4$ und $(-3)^{-4} = 3^{-4}$;

$-3^4 = -1 \cdot 3^4 = -(3^4) \neq (-3)^4$

Gleitkommadarstellung einer Zahl $z \in \mathbb{Q}$:

$66200000 = 6{,}62 \cdot 10^7$; $0{,}000036 = 3{,}6 \cdot 10^{-5}$

$0{,}045$ mm = $4{,}5\ 10^{-2}$ mm = $4{,}5\ 10^{-5}$ m

7. Strahlensatz:

Werden zwei Geraden g und h mit dem Schnittpunkt Z von zwei Parallelen p_1 und p_2 (die Z nicht enthalten) geschnitten, so gilt:

1.) Je zwei Abschnitte auf g (z.B. $\overline{ZA}, \overline{ZA'}$) verhalten sich wie die entsprechenden Abschnitte auf h (z.B. $\overline{ZB}, \overline{ZB'}$).

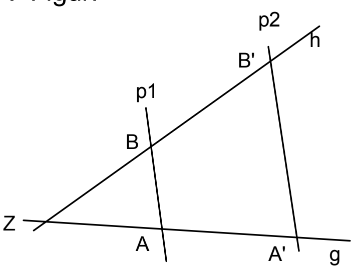
$$\overline{ZA} : \overline{AA'} = \overline{ZB} : \overline{BB'}$$
$$\overline{ZA'} : \overline{ZA} = \overline{ZB'} : \overline{ZB}$$
$$\overline{ZA'} : \overline{AA'} = \overline{ZB'} : \overline{BB'}$$

2.) Die Abschnitte auf den Parallelen verhalten sich wie die von Z aus gemessenen Abschnitte auf g oder h.

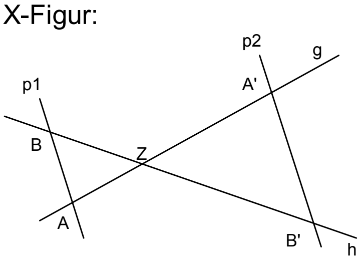
$$\overline{A'B'} : \overline{AB} = \overline{ZA'} : \overline{ZA}$$
$$\overline{A'B'} : \overline{AB} = \overline{ZB'} : \overline{ZB}$$

Dies gilt für beide Figuren!

V-Figur:

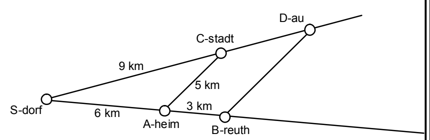


X-Figur:

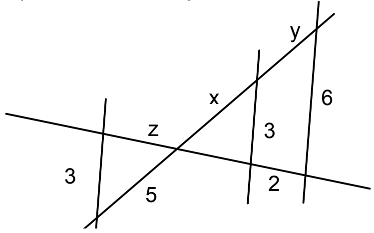


7. Aufgabe:

a) Berechne wie weit C-stadt von D-au und D-au von B-reuth entfernt sind!

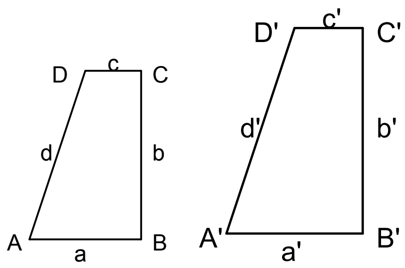


b) Berechne x, y und z!



Zueinander ähnliche Figuren haben die Eigenschaft, dass sie in allen entsprechenden Winkeln und in allen entsprechenden Seitenverhältnissen übereinstimmen.

Beispiel Ähnlichkeitssatz für Dreiecke: Wenn 2 Dreiecke in 2 Winkeln übereinstimmen, sind sie schon ähnlich.

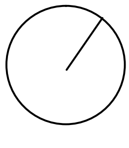


Strecken:
$a' : a = b' : b = \ldots = k$;
k heißt Ähnlichkeitsfaktor.

8. Umfang und Flächeninhalt des Kreises

$u = 2r\pi$ $A = r^2\pi$

π heißt Kreiszahl und hat ungefähr den Wert: $\pi = 3{,}141592654\ldots \approx 3{,}14$



8. Aufgabe:

a) Der Umfang eines Kreises ist 7,85m. Wie groß ist sein Flächeninhalt?

b) Der Flächeninhalt eines Kreises ist 12.57 cm^2. Berechne den Durchmesser!

9. Zufall und Wahrscheinlichkeit

Skript für jeden Schüler!

Ergebnis ω (Versuchsausgang).

Alle Ergebnisse fasst man im **Ergebnisraum** Ω zusammen.

Teilmengen des Ergebnisraumes sind **Ereignisse**. Ein *Elementarereignis* besteht aus nur einem Ergebnis. *Sicheres Ereignis, unmögliches Ereignis.*

Zufallsexperimente, bei denen jedes Elementarereignis gleichwahrscheinlich ist, heißen **Laplace-Experimente**. Man kann dann die **Wahrscheinlichkeit P(E)** für ein Ereignis E so berechnen:

$$P(E) = \frac{\text{Anzahl der Elemente von } E}{\text{Anzahl der Elemente von } \Omega}$$

In einer Urne befinden sich fünf Lose mit den Zahlen 1 bis 5. Beim Ziehen eines Loses sind die möglichen Ergebnisse 1, 2, 3, 4, oder 5. Diese bilden den Ergebnisraum. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Ein Ereignis wäre z.B. E = {„Die Losnummer ist gerade"} = {2, 4}.
Es ist $E \subset \Omega$ ($\subset$ ist die Abkürzung für Teilmenge)

Das **Gegenereignis** $\overline{E}$ (sprich Nicht-E) enthält alles aus Ω ohne E:
d.h. $\overline{E} = \{1, 3, 5\}$.

Die Elementarereignisse {1}, {2}, {3}, {4}, {5} haben alle die gleiche Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{5}$.
Dieses Zufallsexperiment ist also ein Laplace-Experiment, deshalb gilt für die Wahrscheinlichkeit, eine gerade Zahl zu ziehen:

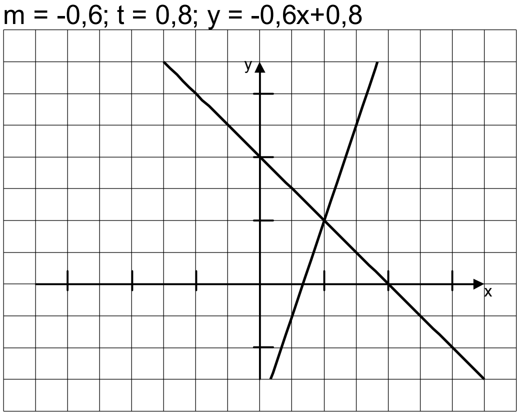
$$P(E) = \frac{2}{5} = 40\% \text{ und } P(\overline{E}) = \frac{3}{5} = 1 - P(E) = 60\%$$

LÖSUNGEN:

1a) f(0) = −1; f(-3) = −7; f(20) = 39; f(0,1) = −0,8
1b) g(1) = 2 ; g(-2) = −1 ; g(0) = 3; g(15) = −222
1c) $S_y(0|1)$; N(1,5|0)
1d) S(1|1)

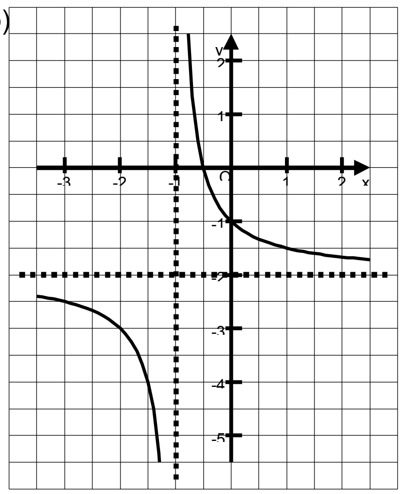
2a) m = -0,6; t = 0,8; y = -0,6x+0,8

2b)



3a) y=3; x=1; L={(1|3)}
3b) y=1; x=3; L={(3|1)}

4)b)



4a)
f(-2)= -3
f(0,5) = $1\frac{1}{3}$
Asymptoten:
x= -1 senkrecht
y =-2 waagrecht

5a) Trick: (–1) ausklammern: $\frac{2}{x-2}$

b) Erweitern auf HN 2(x+1): $\frac{x}{2(x+1)}$

5c) D = Q \ {-1}; Hauptnenner: x+1
Multiplikation mit HN ergibt: $x^2+(x+1) = (2+x)(x+1)$
Algebr. Vereinfachung: $x = -\frac{1}{2} \Rightarrow L = \{-\frac{1}{2}\}$

5d) D = Q \ {0;1}; Hauptnenner: $x^2 - x = x\cdot(x-1)$
Multiplikation mit HN ergibt:
$x + (x-1) = 1 \Leftrightarrow x=1 \quad \Rightarrow L = \{1\}$

6. Aufgabe**:** Vereinfache!

$a)\ \frac{x^3 x^{-4}}{x^{-5}} = x^{3-4+5} = x^4$

$b)\ (2y)^{-2} \cdot \frac{y^3}{4} + 4y =$

$\frac{1}{4y^2} \cdot \frac{y^3}{4} + 4y = \frac{1}{16}y + 4y = 4\frac{1}{16}y$

7a) $\frac{3km}{6km} = \frac{\overline{CD}}{9km} \Leftrightarrow \overline{CD} = 4{,}5km$;
$\frac{\overline{BD}}{5km} = \frac{6km + 3km}{6km} \Leftrightarrow \overline{BD} = 7{,}5km$

7b) $\frac{x}{5} = \frac{3}{3} \Leftrightarrow x = 5$; $\frac{y+5}{5} = \frac{6}{3} \Leftrightarrow y = 5$;
$\frac{5}{5} = \frac{z}{2} \Leftrightarrow z = 2$

8a) r = 1,25 m; A = 4,90 m
8b) $r^2 = 4\text{ cm}^2$; r = 2cm; d = 4cm